# الرِّيَاضِيَّات

## للصف الثاني المتوسط
## الفصل الدراسي الأول

طبعة ابتدائية

1437هـ


بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمدُ للهِ معزِّ الإسلام بنصره، ومُذلِّ الشركِ بقهره، ومصرِّف الأمور بأمره، ومستدرجِ الكافرين بمكره، الذي قدّر الأيام دولاً بعدله، وجعل العاقبةَ للمتقينَ بفضلِه، والصلاةُ والسلام على من أعلى اللهُ منارَ الإسلام بسيفِه.

أما بعد:

فإنه بفضل الله تعالى، وحسن توفيقه تدخل الدولة الإسلامية اليوم عهداً جديداً، وذلك من خلال وضعها اللبنة الأولى في صرح التعليم الإسلامي القائم على منهج الكتاب، وعلى هدي النبوّة وبفهم السلف الصالح والرعيل الأول لها، وبرؤيةٍ صافية لا شرقيّة ولا غربيّة، ولكن قرآنية نبوية بعيداً عن الأهواء والأباطيل وأضاليل دُعاة الاشتراكية الشرقيّة، أو الرأسمالية الغربيّة، أو سماسرة الأحزاب والمناهج المنحرفة في شتّى أصقاع الأرض، وبعدما تركت هذه الوافدات الكفرية وتلك الانحرافات البدعية أثرها الواضح في أبناء الأمة الإسلامية، نهضت دولة الخلافة -بتوفيق الله تعالى- بأعباء ردّهم إلى جادّة التوحيد الزاكية ورحبة الإسلام الواسعة تحت راية الخلافة الراشدة ودوحتها الوارفة بعدما اجتالتهم الشياطين عنها إلى وهدات الجاهلية وشعابها المهلكة.

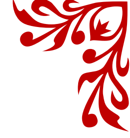
وهي اليوم إذ تُقدم على هذه الخطوة من خلال منهجها الجديد والذي لم تدخر وسعاً في اتّباع خطى السلف الصالح في إعداده، حرصاً منها على أن يأتي موافقاً للكتاب والسنة مستمداً مادته منهما لا يحيد عنهما ولا يعدل بهما، في زمن كثُرَ فيه تحريف المنحرفين، وتزييف المبطلين، وجفاء المعطلين، وغلوا الغالين.

ولقد كانت كتابة هذه المناهج خطوة على الطريق ولبنة من لبنات بناء صرح الخلافة وهذا الذي كُتِب هو جهد المُقل فإن أصبنا فمن الله وإن اخطأنا فمنا ومن الشيطان والله ورسوله منه بريء ونحن نقبل نصيحة وتسديد كل محب وكما قال الشاعر:

وإن تجد عيباً فسُدَّ الخللا قد جلَّ من لا عيب فيه وعلا

(وآخر دعوانا أن الحمد لله ربِّ العالمين)

# المحتويات



# بسم الله الرحمن الرحيم



الحمـد لله، والصـلاة والسـلام عـلى رسـولِ الله، وعـلى آلـه وصـحبه ومـن والاه وبعد

بعد توفيق الله عزَ وجل تم إعداد هذا العمل المتواضع
**(كتاب الرياضيات للصف الثانيالمتوسط)**
حيثُ يتألف هذا الكتاب من فصلين دراسِيين،
**ويتضمن الفصل الدراسي الأوّل من خمسٍ وحدات:**

الوحدة الأولى الأسس والجذور
الوحدة الثانية تحليل الحدوديات
الوحدة الثالثة حل المعادلات وحل المتباينات
الوحدة الرابعة المثلث
الوحدة الخامسة النظام الإحداثي
ولقـــد راعينـــا إســـلوب التـــدرج في عـــرض المـــادة العلميّـــة ومطعمـــة بالتطبيقات العملية .

ونسأل الله تعالى أن يوفق إخواننا المدرسين في توصيل المادة العلمية بصورة صحيحة لطلبتنا الأعزاء.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين
وصلى الله وسلم على نبينا محمد وآله وصحبة أجمعين





# الوحدة الأولى

## الأسس والجذور

**الهدف من دراسة الوحدة**

ينبغي بعد دراسة الوحدة الأولى أن يكون الطالب قادرا على أن:

1) يسهل مقادير جبرية باستخدام قواعد الاسس
2) يسهل عمليات جبرية باستخدام قواعد الجذور

## مفردات الوحدة الأولى

## [1-1] الأساس والأس



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يذكر الأساس والأس

### الأسس

### الأساس والأس

$x^n = x.x.x.x................$ إلى n من المرات

يسمى x أساس القوة ، n تسمى الأس

**مثال على ذلك**

الأساس =2 ، الأس = 3 $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

**مثال آخر**

$X^5 = x.x.x.x.x$

الأساس = x ، الأس = 5

### مثال 1

حدد الأساس والأس لكلاً ممّا يأتي:

أ) y.y.y.y.y.y

ب) $a^7$

ج) $5^3$

الحل

أ) الأساس =y ، الأس = 6

ب) الأساس =a ، الأس =7

ج) الأساس =5 ، الأس =3

## [ 2 – 1 ] قواعد الأسس



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يذكر قوانين الأسس

ملاحظة: اذا كان x, y عددين حقيقين، n, m عددين صحيحين ومع مراعاة استثناء الحالات التي يكون فيها المقام =0، والحالات التي يكون فيها الأساس =0، الأس =0 معاً فإن:–

**1) عند الضرب تجمع الأسس إذا كانت الأساسات متشابهة**

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

### مثال2

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$$

$$y^7 \cdot y^4 = y^{7+4} = y^{11}$$

$$x^5 \cdot x^{-2} = x^{5+(-2)} = x^{5-2} = x^3$$

$$(2^3)\ (2^4) = 2^{3+4} = 2^7$$

$$(10)^3\ (10)^2 = (10)^5$$

**لاحظ**

$x^2 \cdot y^2$ غير ممكن تطبيق قاعدة الضرب لاختلاف الأساسات

$(2^3)\ (5^2)$ غير ممكن تطبيق قاعدة الضرب لاختلاف الأساسات

2) عند القسمة تطرح الأسس إذا كانت الأساسات متشابهة

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

حيث $x \neq 0$

$n > m$

مثال3

$$\frac{x^8}{x^5} = x^{8-5} = x^3$$

$$y^{21} \div y^{19} = y^{21-19} = y^2$$

$$5^9 \div 5^6 = 5^{9-6} = 5^3$$

$$\frac{2^7}{2^5} = 2^{7-5} = 2^2$$

3) عند الرفع تضرب الأسس

$$(x^m)^n = x^{(m)(n)}$$

حيث $x \neq 0$

مثال4

$(x^3)^2 = x^{(3)(2)} = x^6$ , $(2^5)^6 = 2^{30}$

$(y^4)^5 = y^{(4)(5)} = y^{20}$ , $(b^8)^2 = b^{16}$

### 4) التوزيع عند الضرب

$$( x . y )^n = x^n . y^n$$

**مثال5**

$$( x . y )^2 = x^2 . y^2$$

$$( x^2 . y^3 )^5 = (x^2)^5 . (y^3)^5 = x^{10} . y^{15}$$

### 5) التوزيع عند القسمة

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

حيث $y \neq 0$

$x \in R \ , \ n \in Z$

**مثال6**

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$$

$$\left(\frac{x^3}{y^5}\right)^7 = \frac{x^{21}}{y^{35}}$$

**تنبيه**

$$(x+y)^n \neq x^n + y^n$$

$$(x-y)^n \neq x^n - y^n$$

**مثال7**

$$(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$$
$$(y-5)^3 \neq y^3 - 5^3$$

6) أي مقدار أسه صفر يكون ناتجه واحد إذا كان المقدار لا يساوي الصفر

$x^0 = 1 \quad , \quad y^0 = 1$ ، حيث $x \neq 0, y \neq 0$

**مثال8**

$$a^0 = 1 \quad , \quad 5^0 = 1 \quad , \quad 4^0 = 1 \quad , \quad (-2)^0 = 1$$

7) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ، حيث $x \neq 0$

**مثال9**

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad ، \quad y^{-7} = \frac{1}{y^7} \quad ، \quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

**قد يسأل طالب ويقول لماذا $x^0 = 1$ ؟ ، حيث $x \neq 0$**

الأثبات (للاطلاع)

$$x^0 = x^{a-a} = x^a \cdot x^{-a} = x^a \cdot \frac{1}{x^a} = 1$$

**قد يسأل طالب ويقول لماذا $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ ، حيث $x \neq 0$**

الأثبات (للاطلاع)

$$\frac{1}{x^2} = \frac{x^0}{x^2} = x^{0-2} = x^{-2}$$

## مثال10

استخدم قواعد الأسس في إيجاد ناتج ( أو تسهيل ) المقادير الاتية:

أ) $(3x^2y^3)^3(2x^{-2}y^{-3})^3$

ب) $\frac{(16)^2(18)^2}{(81)(8)^3}$

جـ) $y^{(2-a)b} \cdot y^{(b-2)a} \cdot y^{2(a-b)}$

د) $\frac{(81)^{n+2}(9)^{1-2n}(3)^{3n}}{27^{n+2}}$

**الحل**

أ)

$$(3x^2y^3)^3(2x^{-2}y^{-3})^3$$

$$(3)^3(x^2)^3(y^3)^3(2)^3(x^{-2})^3(y^{-3})^3$$

$$(27x^6y^9)(8x^{-6}y^{-9})$$

$$(27)(8)x^{6-6}y^{9-9}$$

$$216x^0y^0$$

$$(216)(1)(1)=216$$

ب)

$$\frac{(16)^2(18)^2}{(81)(8)^3}=\frac{(2^4)^2((6)(3))^2}{(3)^4(2^3)^3}$$

$$=\frac{(2^8)((2)(3))^2(3)^2}{(3^4)(2^9)}=\frac{(2^8)(6^2)(3^2)}{(3^4)(2^9)}$$

$$\frac{(2^8)(2)^2(3)^2(3)^2}{(3^4)(2^9)}=\frac{(2)^{2+8}(3)^{2+2}}{(3^4)(2^9)}$$

$$\frac{(2)^{10}(3)^4}{(3^4)(2^9)}=2^{10-9}=2$$

جـ)

$$y^{(2-a)b} \cdot y^{(b-2)a} \cdot y^{2(a-b)}$$

$$= y^{2b-ab} \cdot y^{ab-2a} \cdot y^{2a-2b}$$

$$= y^{2b-ab+ab-2a+2a-2b} = y^{0} = 1$$

د)

$$\frac{(81)^{n+2}\,(9)^{1-2n}\,(3)^{3n}}{(27)^{n+2}}$$

$$= \frac{(3^4)^{n+2}\,(3^2)^{1-2n}\,(3)^{3n}}{(3^3)^{n+2}}$$

$$= \frac{(3)^{4n+8}\,(3)^{2-4n}\,(3)^{3n}}{3^{3n+6}} = \frac{3^{4n-4n+3n+8-2}}{3^{3n+6}}$$

$$= \frac{\cancel{3}^{3n+6}}{\cancel{3}^{3n+6}} = 1$$

## [ 3 -1 ] الأسس الكسرية ( الجذور)



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يُعرف الجذر

إذا كانت **x** عدداً حقيقيا موجبا وكانت **n** عدد صحيح > 1، m تنتمي إلى Z فإن:

$$\sqrt[\text{الدليل}]{x^{\text{الاس}}} = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

الأساس = $x$

الأس = m

دليل الجذر = n

### مثال11

جد الأساس والأس ودليل الجذر للمقدار $\sqrt[5]{x^3}$

الأساس = x

الأس = 3

دليل الجذر = 5

**ملاحظة** إذا لم يكتب دليل الجذر فيعتبر 2 مثل $\sqrt{y^7}$

الأساس = y

الأس = 7

دليل الجذر =2

**ملاحظة** إذا لم يكتب الأس فيعتبر 1 مثل $\sqrt{y}$

الأساس = y

الأس =1

دليل الجذر =2

**مثال12**

بسط أو جد ناتج كلاً ممّا يلي:

أ) $\sqrt[3]{x^3}$ ب) $\sqrt{y^{12}}$ جـ) $\sqrt[3]{27}$ د) $\sqrt[4]{16}$

الحل:

أ) $\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$

ب) $\sqrt{y^{12}} = y^{\frac{12}{2}} = y^6$

جـ) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3$

د) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = 2$

جذور تربيعية يجب حفظها:

$\sqrt{1} = 1 , \sqrt{4} = 2 , \sqrt{9} = 3 , \sqrt{16} = 4 , \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{36} = 6 , \sqrt{49} = 7 , \sqrt{64} = 8 , \sqrt{81} = 9 , \sqrt{100} = 10$

## [ 4 - 1]ضرب وقسمة وجمع وطرح الجذور التربيعية

### أولاً) ضرب الجذور التربيعية

أ) إذا كانت الأساسات متساوية $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$

أمثلة على ذلك:

$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$ ، $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$ ، $\sqrt{13} \times \sqrt{13} = 13$

ب) إذا كانت الأساسات غير متساوية $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

مثل

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

### ثانياً ) قسمة الجذور التربيعية

$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ بشرط x عدد حقيقي موجب

y عدد حقيقي موجب ، $y \neq 0$

مثل: $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

## ثالثاً ) جمع أو طرح الجذور التربيعية

نستطيع جمع أو طرح الجذور إذا كانت الأساسات متساوية

### مثل 13

1) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

2) $5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

3) $11\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

### مثال 14

جد ناتج المقدار $4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$

الحل

$= (4 - 3 + 8)\sqrt{2}$

$= 9\sqrt{2}$

**مثال:** جد ناتج $6\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{18}$

**الحل:**

$$6\sqrt{2}+\sqrt{2\times 4}-\sqrt{2\times 25}+\sqrt{2\times 9}$$

$$6\sqrt{2}+2\sqrt{2}-5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(6+2-5+3)\sqrt{2}$$

$$=6\sqrt{2}$$

## [ 5 -1 ] تحويل المقام إلى عدد نسبي

**الهدف من الدرس**



أن يكون الطالب قادرا على أن:
يحول المقام الى عدد نسبي

مثل: $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{13}$ ، ...

### أ) التحليل والاختصار

**مثال16**

أكتب الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً نسبياً:

أ) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ ب) $\frac{5}{\sqrt{5}}$

**الحل:**

أ) نحلل البسط $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ب) نحلل البسط $\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

## ب) ضرب البسط والمقام بمرافق المقام

### مثل 17

أكتب الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً نسبياً :

أ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ب) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ جـ) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

الحل:

أ) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

جـ) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{7}$

### ملاحظة

مرافق المقدار $\sqrt{b} + \sqrt{a}$ هو $\sqrt{b} - \sqrt{a}$

وحاصل ضربهما $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

حيث b ، a عدد حقيقي موجب

## مثال 18

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = 3 - 5 = -2$$

## مثال19

ضع المقدار $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ بصورة أبسط بحيث يكون المقام عدداً نسبياً

الحل:

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{7-2}$$

$$= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$$

## [ 6 – 1 ]الجذور التكعيبية



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن: يجد الجذر التكعيبي للعدد

درست في مرحلة سابقة كيفية إيجاد الجذر التكعيبي لعدد حقيقي كما في الأمثلة:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad ، \quad \sqrt[3]{27} = 3 \quad ، \quad \sqrt[3]{-64} = -4$$

وفي هذه المرحلة سندرس جمع وطرح وضرب وقسمة الجذور التكعيبية

ملاحظة

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \neq a$ (في الجذور التربيعي $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

العامل المنسب في الجذور التكعيبية $\begin{cases} \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a \\ \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = a \end{cases}$

مثال20

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$$
$$\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{125} = 5$$
$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = 4$$

جذور تكعيبية يجب حفظها:

$\sqrt[3]{1} = 1$ , $\sqrt[3]{8} = 2$ , $\sqrt[3]{27} = 3$ , $\sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt[3]{125} = 5$ , $\sqrt[3]{1000} = 10$

مرافق العدد $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$ والعكس صحيح

فمثلا مرافق العدد $\sqrt[3]{3}$ هو $\sqrt[3]{9}$ لأنه $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = 3$

ومرافق العدد $\sqrt[3]{25}$ هو $\sqrt[3]{5}$ لانه $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{5} = 5$

مثال21

ضع المقدار $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ بحيث يكون المقام عدداً نسبياً

الحل:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

## 2) جمع وطرح الجذور التكعيبية

مثال22

جد ناتج $\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128}$

الحل:

$$\sqrt[3]{(2)(125)} + \sqrt[3]{(2)(8)} - \sqrt[3]{(2)(64)}$$

$$5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = (5 + 2 - 4)\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

مثال 23

جد ناتج: $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{375}$

الحل:

$$\sqrt[3]{3 \times 27} + \sqrt[3]{3 \times 8} - \sqrt[3]{3 \times 125}$$

$$3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{3} = (3 + 2 - 5)\sqrt[3]{3}$$

$$0 \times \sqrt[3]{3} = 0$$

## تمارين الوحدة الأولى

س1) بسط ( أو جد ناتج ) كلاً ممّا يلي:

أ) $\left(\frac{6x^3y^{-7}}{3x^2y^{-9}}\right)^2$ ب) $\left(\frac{3x^4y^2}{6x^5y^3}\right)^{-2}$

جـ) $(3x^2yz)^0$ د) $(3^{15})^{\frac{1}{5}}-(2^{14})^{\frac{1}{7}}$

هـ) $\frac{(a+b)^5}{(a+b)^{-2}}$ و) $\frac{(x+y)^3\times(x+y)^{-5}}{(x+y)^{-3}}$

س2) بسط (أو جد ناتج) كلا ممّا يأتي:

أ) $\sqrt{16\times49\times9}$

ب) $\sqrt{\frac{9\,x^5\,y^8}{4\,x\,y^6}}$

جـ) $\sqrt[5]{\frac{32\,x^{13}\,y^{15}\,z^3}{x^8y^{10}z^3}}$

د) $\sqrt[3]{(-125)\,(8)\,(64)}$

س3) جد ناتج كلاً ممّا يلي:

أ) $\sqrt[3]{(64\,(125)\,(27)}$

ب) $\sqrt{5}\ .\ \sqrt{10}\ .\ \sqrt{2}$

جـ) $\sqrt{2}\ .\ \sqrt{3}\ .\ \sqrt{6}$

د) $\sqrt[3]{4}\ .\ \sqrt[3]{8}\ .\ \sqrt[3]{2}$

س4) بسط المقادير الآتية بحيث يكون المقام عدداً نسبياً:

أ) $\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}+\frac{1}{\sqrt[3]{54}}$

س5:جد ناتج مايأتي:

$$a)\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{6}{\sqrt{20}}$$

$$b)\ \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}}+\frac{3\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2}}-\frac{10}{\sqrt[3]{6}}$$

س6:بسط المقادير الاتية:

$$a)\ 2\sqrt{80}+3\sqrt{45}-8\sqrt{20}$$

$$b)\ 4\sqrt[3]{24}-5\sqrt[3]{-81}-12\sqrt[3]{3}$$

# الوحدة الثانية

# تحليل الحدوديات

**الهدف من دراسة الوحدة**

**ينبغي بعد دراسة الوحدة الثانية أن يكون الطالب قادرا على أن:**

1) يحلل حدودية الفرق بين مربعين
2) يحلل حدودية الفرق ومجموع مكعبين
3) يحلل حدودية بطريقة التجربة
4) يميز بين مفكوك قوسين

## مفردات الوحدة الثانية



## [ 1 – 2 ] التحليل بطريقة العامل المشترك

الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يستخرج العامل المشترك

## استخراج العامل المشترك

### مثال 1

حلل كلاً ممّا يلي:

$2x + 6 \quad , \quad 5x - 20 \quad , \quad x^2 + 7x \quad , \quad 2x^3 + 4x$

الحل:

$2x + 6 =$

$2x + 2(3) = 2(x + 3)$

$5x - 20 =$

$5x - 5(4) = 5(x - 4)$

$x^2 + 7x =$

$x(x) + 7x = x(x + 7)$

$2x^3 + 4x =$

$2x(x^2) + 2(2x) = 2x(x^2 + 2)$

## [ 2 – 2 ] الفرق بين مربعين — الهدف من الدرس



أن يكون الطالب قادرا على أن:
يحلل فرق بين مربعين

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

فمثلا: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

لنأخذ مثلاً أوضح

$$25 - 9 = (5 - 3)(5 + 3)$$




$$16 = (2)(8)$$

$$16 = 16$$

**ملاحظة**

**مجموع مربعين لا يتحلل ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية**

**فمثلا الحدودية** $x^2 + 9 \neq (x + 3)(x + 3)$

توضيح أكثر: $16 + 9 \neq (4 + 3)(4 + 3)$



$$25 \neq (7)(7)$$

$$25 \neq 49$$

## مثال 2

**حلل الحدوديات الآتية:**

$x^2 - 9$ ، $4x^2 - 25$ ، $49x^2 - 81$ ، $x^2 - 121y^2$

الحل

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

$4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$

$49x^2 - 81 = (7x - 9)(7x + 9)$

$x^2 - 121y^2 = (x - 11y)(x + 11y)$

## مثال 3

**حلل المقدار $x^4 - 81$**

الحل

$x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9)$

(يمكن تحليله) (لا يمكن تحليله)

$= (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

## مثال 4

**حلل كلاً ممّا يلي: $x^2 - 2$ , $x - 4$**

الحل

$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

$x - 4 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$

الآن أصبح بمقدورك أن تبسط بعض الكسور كما في الأمثلة الآتية:

### مثال 5

بسط المقادير الآتية:

أ) $\frac{x^2 - 16}{x + 4}$  ب) $\frac{9y^2 - 1}{3y - 1}$  جـ) $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

الحل

أ) $$\frac{x^2 - 16}{x + 4} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x + 4} = x - 4$$

ب) $$\frac{9y^2 - 1}{3y - 1} = \frac{(3y + 1)(3y - 1)}{3y - 1} = 3y + 1$$

جـ) $$\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= (\sqrt{x} + 1)(x + 1)$$

نشاط

**حلل كلاً ممّا يأتي:** $x^2y^2 - 4y^2$ , $1 - 9x^2y^2$

مثال 6

**حلل كلاً ممّا يلي:**

$3x^3 - 27x$ , $2x^2 - 32$ , $x^3 - 4x$

الحل:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$
$$2x^2 - 32 = 2(x^2 - 16) = 2(x - 4)(x + 4)$$
$$3x^3 - 27x = 3x(x^2 - 9) = 3x(x - 3)(x + 3)$$

نشاط

**حلل كلاً ممّا يلي:**

أ) $13x^2 - 52$

ب) $2 - 8x^2y^2$

جـ) $x - 3\sqrt{x}$

د) $a^4 - b^4$

## [ 3 – 2 ] تحليل فرق مكعبين أو مجموع مكعبين



**الهدف من الدرس**

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يحلل فرق أو مجموع مكعبين

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

توضيح

$X^3 - y^3$

x.x.x    y.y.y

(x – y) (مربع الأول + (الثاني × الأول) + مربع الثاني)

نفس الإشارة    عكس الإشارة    دائماً موجب

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

أرقام ستحتاجها في تحليل فرق أو مجموع مكعبين

$1\times1\times1 = \mathbf{1}$

$2\times2\times2 = \mathbf{8}$

$3\times3\times3 = \mathbf{27}$

$4\times4\times4 = \mathbf{64}$

$5\times5\times5 = \mathbf{125}$

$6\times6\times6 = \mathbf{216}$

### مثال 7

حلل كلاً ممّا يلي:

$x^3 - 1 \quad , \quad y^3 + 8 \quad , \quad x^3 - 64 \quad , \quad -x^3 + 125$

الحل:

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$y^3 + 8 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

$x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

$-x^3 + 125$ يمكن كتابته بطريقة أسهل في التحليل:

يكتب

$$125 - x^3 = (5 - x)(25 + 5x + x^2)$$

### مثال 8

حلل كلاً ممّا يلي: $2x^3 + 128 \quad , \quad 8x^3 - 27y^3$

الحل:

$8x^3 - 27y^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

$2x^3 + 128 = 2(x^3 + 64) = 2(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

### نشاط

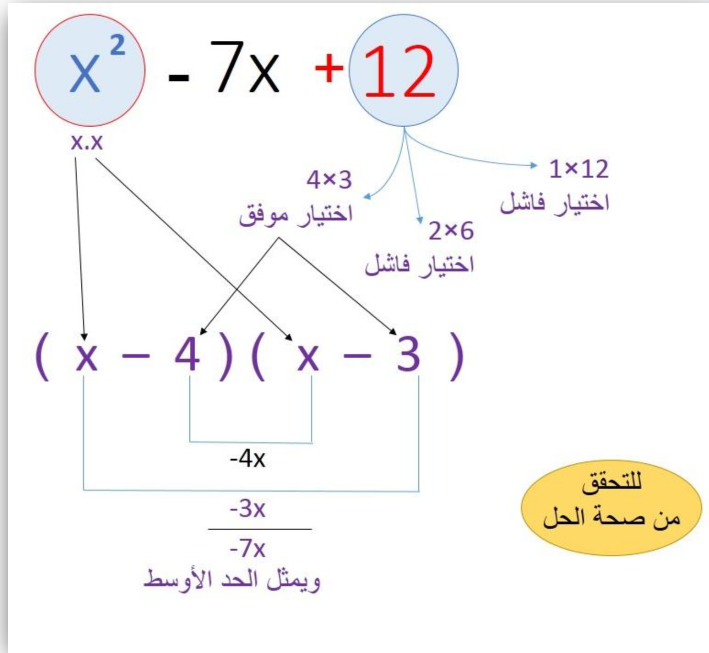
بسط كلاً من: $\dfrac{2 - 54x^3}{1 + 3x + 9x^2}$ ، $\dfrac{x^4 - x}{x^2 + x + 1}$

## [ 2 – 4 ] تحليل حدانية من ثلاث حدود (بطريقة التجربة )

**الهدف من الدرس**

**أن يكون الطالب قادرا على أن:**
**يحلل حدانية من ثلاث حدود بالتجربة**

إذا أردنا تحليل الحدانية $x^2 - 7x + 12$ تابع طريقة التحليل الآتية :



**مثال 9**

**حلل كلاً ممّا يلي :**

أ) $x^2 - 3x - 4$ د) $x^2 + 8x + 15$

ب) $x^2 + 8x - 20$ هـ) $x^2 - 17x + 72$

جـ) $x^2 + 9x + 20$ و) $y^2 - 9y - 36$

الحل:

أ) $x^2 - 3x - 4$

**الحد الأخير** $4 = (2)(2)$

أو $4 = (4)(1)$

نختار $(1)(4)$ لكي نحصل على الحد الوسط

$= (x - 4)(x + 1)$

$-4x$

$+1x$

$-3x$ الحد الوسط

ب) $x^2 + 8x - 20 = (x + 10)(x - 2)$

**قد يسأل طالب هل تحليل الحدانية**

$x^2 + 8x - 20 = (x + 5)(x - 4)$ صحيح ؟ نتحقق ثم نحكم

$+5x$

$-4x$

$x$ لا يساوي الحد الوسط

فنقول هذا التحليل غير صحيح

جـ) $x^2 + 9x + 20 = (x + 5)(x + 4)$

د) $15 + 8x + x^2 = (5 + x)(3 + x)$

هـ) $x^2 - 16x + 72 = (x - 9)(x - 8)$

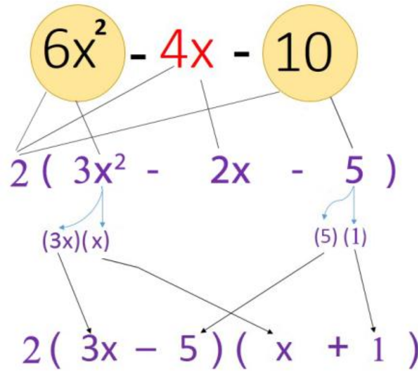
و) $y^2 - 9y - 36 = (y - 12)(y + 3)$

تحقق بنفسك من صحة التحليل

### مثال 10

حلل الحدانية $6x^2 - 4x - 10$

الحل:




### مثال 11

**حلل كلاً من الحدوديات الآتية:**

أ) $3x^2 - 7x - 6$

ب) $6x^2 - 7x - 5$

جـ) $2x^2 + 7x - 9$

**الحل:**

أ) $3x^2 - 7x - 6 = (3x + 2)(x - 3)$

ب) $6x^2 - 7x - 5 = (3x - 5)(2x + 1)$

جـ) $2x^2 + 7x - 9 = (2x + 9)(x - 1)$

## مثال 12

ضع بأبسط صورة كلاً ممّا يلي:

أ) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 - x}$ ب) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 36}$

الحل:

$$= \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 - x}$$

$$\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}$$

ب) $$= \frac{(x-6)(x-1)}{(x-6)(x+6)} = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 36}$$

$$\frac{x-1}{x+6}$$

## نشاط

بسط المقدار $\frac{x^4 - 14x^2 - 32}{(x-4)(x^2+2)}$

مثال 13

**ضع بأبسط صورة كلاً ممّا يلي:**

أ) $\frac{2x + 4}{x^2 + 2x + 4} \times \frac{2x^3 - 16}{2x^2 - 8}$

ب) $\frac{x + 3}{10x + 2} \div \frac{5x^2 + 14x - 3}{25x^2 - 1}$

جـ) $\frac{x^3 + 2x^2 + 4x}{x^3 - 8} + \frac{3x - 9}{x^2 - 5x + 6}$

د) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x} - \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$

هـ) $\frac{x + 2}{x^2 + 7x + 10} + \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$

الحل:

أ) $\frac{2(x^3 - 8)}{2(x^2 - 4)} \times \frac{2(x + 2)}{x^2 + 2x + 4}$

$$\frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} \times \frac{2(x + 2)}{x^2 + 2x + 4} = 2$$

ب)

$$\frac{5x^2 + 14x - 3}{25x^2 - 1} \times \frac{10x + 2}{x + 3}$$

$$\frac{(5x - 1)(x + 3)}{(5x - 1)(5x + 1)} \times \frac{2(5x + 1)}{x + 3} = 2$$

جـ)

$$\frac{x\,(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} + \frac{3(x - 3)}{(x - 3)(x - 2)} =$$

$$\frac{3}{x - 2} + \frac{x}{x - 2} = \frac{3 + x}{x - 2}$$

د)

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x\,(x + 1)} - \frac{(x - 4)(x - 1)}{x\,(x - 4)} =$$

$$\frac{(x - 1)}{x} - \frac{(x - 1)}{x} = 0$$

هـ)

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} + \frac{x + 2}{(x + 5)(x + 2)} =$$

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 5} = \frac{x + 5 + x - 1}{(x - 1)(x + 5)} = \frac{2x + 4}{(x - 1)(x + 5)}$$

$$= \frac{2(x+2)}{(x - 1)(x + 5)}$$

## [ 5 – 2] المربع كامل



**الهدف من الدرس**

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يميز حدانية مربع كامل

لاحظ المثال:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)\ (x + 3)$$

يسمى مربع كامل لان القوس الأول يشبه القوس الثاني

ويمكن كتابة المقدار $(x + 3)\ (x + 3)$ بالشكل $(x + 3)^2$

### مثال 14

**بين أي من العبارات التالية تمثل مربعاً كاملاً :**

أ) $4x^2 - 12x + 9$

ب) $x^2 - 10x + 25$

جـ) $x^2 + 8x + 16$

د) $x^2 - 12x - 36$

الحل

أ) $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)\ (2x - 3) = (2x - 3)^2$

(الحدانية مربع كامل)

ب) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)\ (x - 5) = (x - 5)^2$

(الحدانية مربع كامل)

جـ) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)\ (x + 4) = (x + 4)^2$

د) $x^2 - 9x - 36 \neq (x - 6)\ (x + 6)$

(تحليلي خاطئ)

$x^2 - 9x - 36 = (x - 12)(x + 3)$

(لا يمثل مربع كامل)

## إيجاد قيمة a التي تجعل الحدانية مربعاً كاملاً

1) إذا كان a هو معامل $x^2$ مثل $ax^2 - 6x + 9$

2) إذا كان a هو معامل x مثل $x^2 + ax + 36$

3) إذا كان a هو الحد المطلق مثل $x^2 + 8x + a$

**نستخدم القانون**

**( معامل الحد الوسط $)^2$ = (4) (معامل $x^2$ ) ( الحد المطلق )**

### مثال 15

جد قيمة a التي تجعل الحدوديات الآتية مربعات كاملة:

أ) $ax^2 - 10x + 25$

ب) $4x^2 + ax + 9$

جـ) $9x^2 - 12x + a$

الحل

أ)

**( معامل الحد الوسط $)^2$ = (4) (معامل $x^2$ ) ( الحد المطلق )**

$$(10)^2 = 4\,(a)\,(25) \longrightarrow 100 = 100\,(a) \longrightarrow (a) = 1$$

ب)

**( معامل الحد الوسط $)^2$ = (4) (معامل $x^2$ ) ( الحد المطلق )**

$$(a)^2 = (4)\,(4)\,(9) \longrightarrow a = (2)\,(2)\,(3) = 12$$

جـ)

**( معامل الحد الوسط $)^2$ = (4) (معامل $x^2$ ) ( الحد المطلق )**

$$(12)^2 = (4)\,(9)\,(a) \longrightarrow 144 = 36a \longrightarrow a = 4$$

## [ 6 – 2] مفكوك حاصل ضرب حدانيتين كل منها مؤلف من حدين



**الهدف من الدرس**

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يفك حاصل ضرب حدانيين

لنأخذ المثال الاتي:

$$(2x + 5)(x + 3)$$

$$= 2x(x) + 2x(3) + 5(x) + 5(3)$$

$$= 2x^2 + 6x + 5x + 15$$

جمع حدود متشابهة

$$= 2x^2 + 11x + 15$$

### مثال 16

**جد مفكوك كلاً ممّا يلي:**

أ) $(3x - 2)(7x + 4)$

ب) $(x - 9)(2x + 1)$

جـ) $(x - 6)(3x + 5)$

الحل

أ) $(3x - 2)(7x + 4) = 21x^2 + 12x - 14x - 8 = 21x^2 - 2x - 8$

ب) $(x - 9)(2x + 1) = 2x^2 + x - 18x - 9 = 2x^2 - 17x - 9$

جـ) $(x - 6)(3x + 5) = 3x^2 + 5x - 18x - 30 = 3x^2 - 13x - 30$

## [7 – 2 ] تمييز مفكوك قوسين



**الهدف من الدرس**

**أن يكون الطالب قادرا على أن:**
يميز حاصل ضرب قوسين

أ) فرق بين مربعين

مثل) $(3x + 2)\ (3x - 2)$

هذا المثال يمكن حله بطريقتين

| الطريقة الأولى | الطريقة الثانية |
|---|---|
| **ضرب اعتيادي** | **فرق بين مربعين**<br>$(\text{الحد الأول})^2 - (\text{الحد الثاني})^2$ |
| $(3x + 2)\ (3x - 2)$<br>$9x^2 - 6x + 6x - 4$<br>$9x^2 - 4$ | $(3x + 2)\ (3x - 2)$<br>$(3x)^2 - (2)^2$<br>$9x^2 - 4$ |

نشاط

جد حاصل الضرب(وبطريقتين) لكلاً ممّا يلي:

أ) $(x + 2)\ (x - 2)$

ب) $(5x + 1)\ (5x - 1)$

جـ) $(2x - 4)\ (2x + 4)$

**ب) مربع كامل**

مثل) $(3x + 2)\ (3x + 2)$

يمكن حل هذا المثال بطريقتين

$(3x + 2)\ (3x + 2)$

**ضرب اعتيادي**

$(3x + 2)\ (3x + 2)$

$(9x^2 + 6x + 6x + 4)$

$9x^2 + 12x + 4$

**بتربيع أحد القوسين ثم إستخدام القانون**

مربع الأول + 2 (الأول) (الثاني) + مربع الثاني

$(3x + 2)\ (3x + 2)$

$(3x)^2 + 2(3x)(2) + (2)^2$

$9x^2 + 12x + 4$

**نشاط**

**جد حاصل الضرب (وبطريقتين) لكلاً ممّا يلي:**

أ) $(x + 3)\ (x + 3)$

ب) $(2x - 1)\ (2x - 1)$

جـ) $(x - 7)\ (x - 7)$

د) $(4x + 1)\ (4x + 1)$

مثال 17

باستخدام طرق التحليل جد ناتج $(101)^2$

الحل

$$(101)^2 = (100+1)^2 = (100)^2 + 2(100)(1) + (1)^2$$
$$= 10000 + 200 + 1 = 10201$$

## تمارين الوحدة الثانية

س1) حلل كلاً من الحدوديات الآتية:

أ) $1 - 64x^3$

ب) $x^2 - 2xy + y^2$

جـ) $x^2y^2 - 4b^2$

د) $(x-1)^2 - 9$

و) $x^3 + 8y^3$

هـ) $3x^3 - 81y^3$

ز) $4x^2 - 20xy + 25y^2$

ك) $2x^3 - 6x^2 + 9x$

ي) $4x^2 - 20x - 25$

س2) جد حاصل الضرب لكلاً ممّا يلي:

أ) $(x^2 - 2)(2x + 1)$ ب) $(4x + 7)(4x - 7)$

جـ) $(1-2x)(1 + 3x)$ د) $(2x + 5)(2x + 5)$

س3) سهل المقادير الجبرية الآتية:

أ) $\dfrac{(x-1)(2x+2)}{x^3 - x} + \dfrac{(2x-3)^2}{4x^3 - 12x^2 + 9x}$

ب) $\dfrac{2x+10}{x+2} \div \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 + 3x - 10}$

جـ) $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 2x + 1} \times \dfrac{6x+9}{2x^2 + x - 3}$

س4) جد مفكوك كلاً ممّا يلي:

أ) $(x+3)^2$

ب) $(3-2x)^2$

جـ) $(x+1)^2 - (x-1)^2$

د) $\left(\dfrac{x^2 - 25}{x - 5}\right)^2$

س5) جد قيمة a التي تجعل الحدوديات الآتية مربعاً كاملاً:

أ) $x^2 - 6x + a$

ب) $ax^2 - 32x + 64$

جـ) $x^2 + ax + 36$

# الوحدة الثالثة

## ◈المعادلات

## ◈المتباينات



الهدف من دراسة الوحدة

**ينبغي بعد دراسة الوحدة الثالثة أن يكون الطالب قادرا على أن:**

1) يحل معادلة من الدرجة الأولى بمتغير واحد
2) يحل معادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد
3) يحل معادلتين كلاهما من الدرجة الأولى بمتغيرين
4) يحل معادلتين احداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية بمتغيرين
5) يحل معادلتين كلاهما من الدرجة الثانية وبمتغيرين
6) يجد مجموعة حل متباينة من الدرجة الأولى
7) يجد مجموعة حل متباينة من الدرجة الثانية

# مفردات الوحدة الثالثة

[ 1 - 3 ] حل المعادلة من الدرجة الأولى بمتغير واحد

[ 2 - 3 ] حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد

(بطريقة الفرق بين مربعين أو بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

[ 3 - 3 ] حل معادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد

(بطريقة التجربة)

[ 4 - 3 ] حل معادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد

(بطريقة القانون الخاص)

[ 5 - 3 ] حل معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين

[ 6 - 3 ] حل معادلتين من الدرجة الثانية بمتغيرين

[ 7 - 3 ] حل المعادلة الأسية

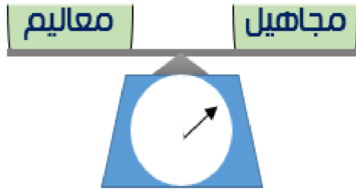
[ 8 - 3 ] المتباينات

## [ 1 – 3 ] حل معادلة من الدرجة الأولى وبمتغير واحد



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يحل معادلة من الدرجة الأولى وبمتغير واحد




### مثال 1

حل المعادلة $x + 3 = 5$

الحل

$x = 5 - 3 \longrightarrow x = 2$

مجموعة حل المعادلة $x = 2$

### مثال 2

حل المعادلة: $3y - 2 = 10$

الحل

$$3y = 10 + 2 \longrightarrow 3y = 12 \longrightarrow y = \frac{12}{3} = 4$$

مجموعة حل المعادلة : $y = 4$

### مثال 3

حل المعادلة $5x - 2 = 3x + 12$

الحل

$$5x - 3x = 12 + 2 \longrightarrow 2x = 14 \longrightarrow x = \frac{14}{2} = 7$$

مجموعة حل المعادلة : $x = 7$

## [ 2 – 3 ] حل معادلة من الدرجة الثانية وبمتغير واحد

$$x^2 = a \longrightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

حيث أن أ عدد حقيقي موجب

الهدف من الدرس



أن يكون الطالب قادرا على أن:
حل معادلة من الدرجة الثانية وبمتغير واحد

### مثال 4

حل المعادلة $x^2 = 9$

الحل

توجد طريقتين للحل

$x^2 = 9$

**بطريقة الفرق بين مربعين**

$x^2 - 9 = 0$

$(x - 3)(x + 3) = 0$

إما

$x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

أو

$x + 3 = 0 \longrightarrow x = -3$

$x^2 = 9$

**بطريقة الجذر التربيعي للطرفين**

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

إما

$x = 3$

أو

$x = -3$

## مثال 5

جد مجموعة حل المعادلات الآتية:

أ) $x^2 - 4 = 0$

ب) $x^2 = 3$

جـ) $3x^2 - 75 = 0$

د) $x^3 - x = 0$

### الحل

أ) $x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

ب) $x^2 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$

جـ) $3x^2 = 75 \longrightarrow x^2 = \frac{75}{3} = 25 \longrightarrow$

$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

د) نستخرج عامل مشترك x :

$x(x^2 - 1) = 0$

$x(x - 1)(x + 1) = 0$

إما $x = 0$ أو

$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

أو

$x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$

## [ 3 - 3 ] حل معادلة من الدرجة الثانية وبمتغير واحد بطريقة التجربة

**مثال 6**

حل المعادلة:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

الحل

$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

إما $x - 5 = 0 \longrightarrow x = 5$

أو $x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

مجموعة حل المعادلة : $x = 5 \quad , \quad x = 3$

**مثال 7**

حل المعادلة: $x^3 + x^2 - 12x = 0$

الحل

نستخرج عامل مشترك x

$$x(x^2 + x - 12) = 0$$

$$x(x + 4)(x - 3) = 0$$

إما $x = 0$

أو $x + 4 = 0 \longrightarrow x = -4$

أو $x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

مجموعة حل المعادلة : $x = 0 \quad , x = -4 \quad , x = 3$

## [4 – 3] حل معادلة من الدرجة الثانية وبمتغير واحد بطريقة القانون الخاص

إذا تعذر حل المعادلة بطريقة التجربة نستخدم القانون الخاص:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة وله ثلاث حالات:

1) إذا كان $b^2 - 4ac = +$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

2) إذا كان $b^2 - 4ac = -$ ليس للمعادلة حل حقيقي

3) إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

**مثال 8**

حل المعادلة $x^2 + 3x - 1 = 0$

**الحل**

يتعذر حل المعادلة بالتجربة ( تحقق بنفسك) لذا نستخدم القانون الخاص

$$1x^2 + 3x - 1 = 0$$

$a = 1 \qquad b = 3 \qquad c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \quad , \quad \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

ملاحظة

سنقتصر في هذا البند على المعادلات التي لها حل ضمن مجموعة الاعداد الحقيقية

مثال 9

حل المعادلة $3x^2 - 7x + 1 = 0$

الحل

$a = 3 \quad , \quad b = -7 \quad , \quad c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{49 - 12}}{2(3)} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

مثال 10

بين نوع جذري المعادلة $4x^2 - 4x + 1 = 0$ ( متساويان ، مختلفان)

الحل :

$a = 4 \quad b = -4 \quad c = 1$

المميز: $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$

للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

## [ 5 – 3 ] حل معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين



إيجاد قيم x ، y التي تحققان كلا المعادلتين وهناك طريقتين للحل

### الطريقة الأولى: حل المعادلتين آنيا (طريقة حذف أحد المتغيرين)

**مثال 11**

جد مجموعة حلول المعادلتين $3x + y = 7 \quad , \quad 2x - y = 3$

**الحل**

$$3x + y = 7 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$2x - y = 3 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$5x = 10 \longrightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

قيمة $x = 2$ نعوضها في إحدى المعادلتين ولتكن معادلة (1)

$$3(2) + y = 7 \longrightarrow 6 + y = 7 \longrightarrow y = 7 - 6 = 1$$

مجموعة حل المعادلة: $x = 2 \quad , \quad y = 1$

**مثال 12**

**جد مجموعة حلول المعادلتين آنيا:**

$$3x + 2y = 11 \quad , \quad x + 2y = 5$$

**الحل**

نغير إشارات إحدى المعادلتين ولتكن معادلة (2) وذلك بضرب طرفي المعادلة في $(-1)$

$$3x + 2y = 11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$-x - 2y = -5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$2x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2} \rightarrow x = 3$$

**نعوض قيمة $X = 3$ في معادلة (1)**

$$3(3) + 2y = 11 \rightarrow 9 + 2y = 11 \rightarrow 2y = 11 - 9$$

$$2y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{2} = 1$$

**مجموعة حلول المعادلة :** $x = 3 \quad , \quad y = 1$

مثال 13

جد مجموعة حلول المعادلتين آنيا :

$$5x + 2y = 1 \quad , \quad x + y = -1$$

الحل

نضرب المعادلة الثانية في (−2)

$$5x + 2y = 1 \quad .......... \quad (1)$$
$$-2x - 2y = 2 \quad ......... \quad (2)$$

$$3x = 3 \longrightarrow x = \frac{3}{3} = 1$$

نعوض في معادلة (1)

$$5(1) + 2y = 1 \longrightarrow 2y = 1 - 5 \longrightarrow 2y = -4 \longrightarrow y = -2$$

حل المعادلتين : $x = 1 \quad , \quad y = -2$

## الطريقة الثانية : طريقة التعويض

### مثال 14

جد مجموعة حلول المعادلتين بطريقة التعويض

$$y - 2x = 5 \quad , \quad y + x = 8$$

الحل

$y - 2x = 5$ .......... (1)

$y + x = 8$ ........... (2)

من المعادلة الأولى

$y - 2x = 5 \longrightarrow y = 5 + 2x$ .......... (3)

نعوض معادلة (3) في إحدى المعادلتين ولتكن المعادلة الثانية

$y + x = 8$

$5 + 2x + x = 8$

$5 + 3x = 8 \longrightarrow 3x = 8 - 5 \longrightarrow 3x = 3 \longrightarrow x = \frac{3}{3} =$

1

نعوض قيمة $x = 1$ في معادلة (3) لإيجاد قيمة y

$y = 5 + 2(1) = 5 + 2 = 7$

مجموعة حلول المعادلتين : $y = 7 \quad , \quad x = 1$

### نشاط

جد مجموعة حلول المعادلتين بالطريقة التي تختارها

$$7x - 3y = 12 \quad , \quad -x + y = 0$$

## [ 6 – 2 ] حل معادلتين من الدرجة الثانية بمتغيرين



**مثال 15**

حل المعادلتين $2x^2 + 3y^2 = 11$ , $5x^2 - 3y^2 = 17$

**الحل**

$2x^2 + 3y = 11$ ............ (1)

$5x^2 - 3y = 17$ ............ (2)

$7x^2 = 28 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm$

عندما $x = 2$ نعوض في معادلة (1)

$2(2) + 3y = 11$

$8 + 3y = 11$

$3y^2 = 11 - 8$

$3y^2 = 3 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$

عندما $x = -2$ نعوض في معادلة (1)

$2(-2)^2 + 3y = 11$

$8 + 3y = 11$

$3y^2 = 11 - 8 \rightarrow 3y^2 = 3 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$

مجموعة حل المعادلة $y = \pm 1$ , $x = \pm 2$

مثال 16

حل المعادلتين $x^2 + y^2 = 10$ , $x + y = 4$

الحل

$x + y = 4$ ........... (1)

$x^2 + y = 10$ ........... (2)

تنبيه يتعذر حل المعادلتين آنيا بطريقة الحذف لأن المعادلة الأولى من الدرجة الأولى والمعادلة الثانية من الدرجة الثانية

في هذه الحالة نستخدم طريقة التعويض

من معادلة (1)

$y = 4 - x$ ............. (3)

نعوض في معادلة (2)

$x^2 + (4 - x) = 10$

$x^2 + 16 - 8x + x = 10$

$2x^2 - 8x + 16 - 10 = 0$

$2x^2 - 8x + 6 = 0$

نقسم على 2 لتسهيل المعادلة

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 3)(x - 1) = 0$

إما $x = 3 \longleftarrow x - 3 = 0$ عوض في معادلة(3) $y = 4 - 3 = 1$

أو $x = 1 \longleftarrow x - 1 = 0$ عوض في معادلة(3) $y = 4 - 1 = 3$

مجموعة حل المعادلة $(3 , 1) \longleftarrow y = 1$ , $x = 3$

أو

$(1 , 3) \longleftarrow y = 3$ , $x = 1$

## [ 7 – 3 ] حل المعادلة الأسية



**المعادلة الأسية**

**هي معادلة أساسها عدد ثابت وأسها متغير وصيغتها**

$a^x = a^y$ حيث أن a عدد حقيقي

**ويكون حلها بطريقة ( إذا تساوت الأساسات فسوف تتساوى الأسس )**

**بشرط** $\notin \{1, 0, -1\}$

### مثال 17

**حل المعادلات الأسية الآتية:**

أ) $2^{2x-1} = 2^{x+3}$

ب) $3^{5x+7} = 9$

جـ) $7^{x^2-3x-2} = 49$

د) $5^{x^2+3x-4} = 1$

الحل

أ) $x^{x+3} = 2^{2x-1}$ ( إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس ) مع مراعاة الشروط

$$2x - 1 = x + 3$$

$$2x - x = 3 + 1 \rightarrow x = 4$$

ب) $3^{5x+7} = 9$

$$3^{5x+7} = 3^2 \rightarrow 5x + 7 = 2 \rightarrow 5x = 7 - 2 \rightarrow 5x = 5$$

$$x = \frac{5}{5} = 1$$

جـ) $7^{x^2 - 3x - 2} = 49$

$$7^{x^2 - 3x - 2} = 7$$

$$x^2 - 3x - 2 = 2 \rightarrow x^2 - 3x - 2 - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$$

إما $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

أو $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

د) $5^{x^2 + 3x - 4} = 1$

$$5^{x^2 + 3x - 4} = 5^0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

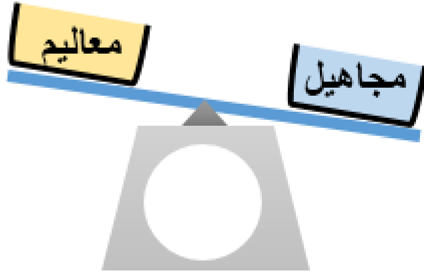
إما $x = -4$ $\quad x + 4 = 0$

أو $x = 1$ $\quad x - 1 = 0$

## [ 8 – 3 ] المتباينة (أو تسمى المتراجحة)

تعبير رياضي يحوي مقادير جبرية بينها أحد الرموز الآتية :

$( < \ , \ > \ , \ \geq \ , \ \leq \ )$




**ملاحظة**

الرمز $\leq$ أصغر أو يساوي

الرمز $\geq$ أكبر أو يساوي

الرمز $<$ أصغر

الرمز $>$ أكبر

### مراجعة لموضوع الفترات

إذا كانت $a , b$ عدد حقيقي ، حيث أن $a$ أصغر من $b$

1) الفترة المفتوحة

$( a , b )$ أو تكتب $\{ x: a < x < b \}$

مثل $(-1 , 5)$ أو $\{ x: -1 < x < 5 \}$

2) الفترة المغلقة

$[ a , b ]$ أو تكتب $\{ x: a \leq x \leq b \}$

مثل $[ 2 , 7 ]$ أو $\{ x: 2 \leq x \leq 7 \}$

3) الفترة $(a , b ]$ أو تكتب $\{ x: a < x \leq b \}$

4) الفترة $[ a , b )$ أو تكتب $\{ x: a \leq x < b \}$

6) الفترة غير معروفة النهاية مثل $\{ x: x < a \}$

أو $\{ x: x \leq a \}$ أو $\{ x: x > a \}$

أو $\{ x: x \geq a \}$

## أولاً ) حل المتباينة من الدرجة الأولى بمتغير واحد

**حل المتباينة عبارة عن جميع الأعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة.**

### مثال 18

**أوجد قيمة x في كل من المتباينات الآتية:**

أ) $2x - 1 > 3$ ب) $1 - 3x \geq 10$

جـ) $2x - 3 \leq 3x + 4$ د) $-3 < 2x - 1 \leq 1$

الحل

أ) $\mathbf{2x - 1 > 3}$

$2x > 3 + 1 \rightarrow 2x > 4$ نقسم طرفي المتباينة على

$x > 2$

مجموعة حلول المتباينة = $\{ x : x > 2 \}$

ب) $\mathbf{1 - 3x \geq 10}$

$-3x \geq 9 \rightarrow -3x \geq 10 - 1$ نضرب في ( $-1$ ) مع قلب العلامة

$\rightarrow 3x \leq -9 \rightarrow$ نقسم طرفي المتباينة على 3

$x \leq -3$

**تنبيه ! إذا كان معامل x سالب**
**نضرب طرفي المتباينة في $(-1)$ مع قلب العلامة**

مجموعة حلول المتباينة = $\{ x : x \leq -3 \}$

ج) $2x - 3 \leq 3x + 4$

الحل

$2x - 3x \leq 4 + 3 \longrightarrow -x \leq 7$

نضرب في $(-1)$ وقلب العلامة

$x \geq -7$

مجموعة حلول المتباينة = $\{ x: x \geq -7 \}$

د) $-3 < 2x - 1 \leq 1$

الحل

$-3 < 2x - 1 \leq 1$

$2x - 1 \leq 1$ ، $2x - 1 > -3$

$2x \leq 1 + 1$ ، $2x > -3+1$

$2x \leq 2$ ، $2x > -2$

$x \leq 1$ ، $x > -1$

مجموعة حل المتباينة = $\{ x: -1 < x \leq 1 \}$

## مراجعة القيمة المطلقة

**القيمة المطلقة للعدد الثابت**

$|2| = 2$ ، $|-2| = 2$

**القيمة المطلقة للمتغير**

$|x|$ فيه احتمالين احتمال x موجب واحتمال x سالب

**مثال 19**

حل المتباينة $|2x+1| \geq 3$

الحل

| الإحتمال الموجب | الإحتمال السالب |
|---|---|
| $2x + 1 \geq 3$ | $-(2x + 1) \geq 3$ |
| $2x \geq 3 - 1$ | $2x + 1 \leq -3$ |
| $2x \geq 2$ | $2x \leq -3 - 1$ |
| $x \geq 1$ | $2x \leq -4$ |
| | $x \leq -2$ |

مجموعة حل المتباينة = $\{x: -2 \geq x \geq 1\}$

**مثال20**

حل المتباينة $|x-2| < 5$

الحل

**الإحتمال الموجب**

$x-2 < 5$

$x < 5 + 2$

$x < 7$

**الإحتمال السالب**

$-(x-2) < 5$

$x-2 > -5$

$x > -5+2$

$X > -3$

مجموعة الحل= ( ‎-3 ، 7)

**مثال22**

حل المتباينة $2x + |3x| < -1$

الحل

إما $2x + 3x < -1$

$5x < -1$

$x < \frac{-1}{5}$

أو $2x - 3x < -1$

$-x < -1$

$x > 1$

مجموعة الحل = $\{x: \frac{1-}{5} > x > 1\}$

## تمارين الوحدة الثالثة

س1) جد حل المعادلات الآتية:

أ) $2(x - 3) = -4$

ب) $3(2x + 1) = 2x - 9$

جـ) $2x^2 - 18 = 0$

د) $3x^2 = 2(1 - x^2) + 3$

هـ) $2x^2 + 7x - 9 = 0$

و) $x(2x - 15) = x^2 - 5x - 24$

س2) بين نوع جذري المعادلة ( مع حل المعادلة) لكلاً ممّا يلي:

أ) $x(x + 8) = -16$

ب) $3x^2 - 2x - 5 = x(2x + 1)$

س3) جد مجموعة حلول المعادلتين بطريقة التعويض لكلاً ممّا يلي :

أ) $27x + 6y + 9 = 0 \quad , \quad y + 3x = 0$

ب) $x + y = 5 \quad , \quad 3x + 2y = 12$

س4) جد مجموعة حلول المعادلتين آنيا لكلاً ممّا يلي:

أ) $2x - y = -1 \quad , \quad 5x + 2y = -7$

ب) $2x + 3y = 7 \quad , \quad x + 2y = 8$

س5) جد حل المعدلات الآتية:

أ) $x^2 + 3x = 2x^2 - 3(3 - x)$

ب) $4x^2 - 1 = 0$

س6) حل المعادلات الأسية الآتية:

أ) $3^{x^2 - 3x + 6} = 81$

ب) $5^{x^2 - 13} = 125$

د) $(3^x - 81)(2^x - 16) = 0$

هـ) $2^{2x} - 13\,(2^x) + 36 = 0$

س7) ما قيمة m التي تجعل جذري المعادلة
$4x^2 + mx + 1 = 0$ متساويان

س8) جد مجموعة حل المعادلتين $y^2 + x^2 = 26$ , $y = 6 - x$

س9) جد عددين موجبين مجموعهما = 125 والفرق بينهما = 117

س10) جد قيم x التي تحقق ما يلي:

أ) $3x - 1 < 4x + 3$

ب) $7 \leq 2x + 1 \leq 5$

س11) حل المتباينات الآتية:

أ) $|\,3x - 4\,| < 7$

ب) $|\,2 - x\,| \leq 5$

# الوحدة الرابعة

# أنواع المثلث

## الهدف من دراسة الوحدة

ينبغي بعد دراسة الوحدة الرابعة أن يكون الطالب قادرا على أن:

1) يميز بين أنواع المثلثات ويذكر خواص كل منهما
2) يذكر حالات تطابق مثلثين
3) يذكر حالات تشابه مثلثين
4) يجد قيم النسب المثلثية $\tan\theta$ , $\cos\theta$ , $\sin\theta$ للزوايا الخاصة
5) يطبق نظرية المثلث القائم الزاوية

# [ 4-1 ] أنواع المثلثات

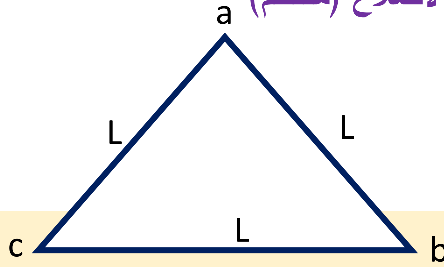


الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يميز بين أنواع المثلثات

## أنواع المثلث

### 1) متساوي الأضلاع (منتظم)



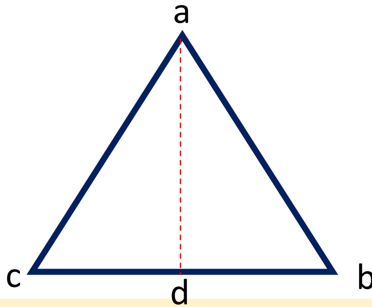

خواصه

**ab = ac = bc**

قياس زواياه متساوية وتساوي $60^o$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$$

### 2) متساوي الساقين

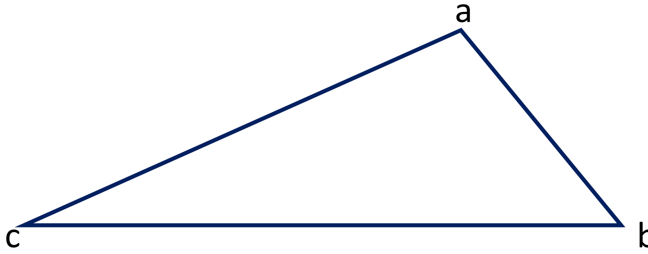



خواصه

**ab = ac**

قياس الزاوية c= قياس الزاوية b

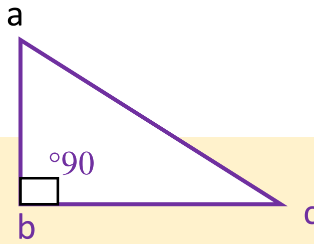
## 3) مختلف الأضلاع




خواصه

ab ≠ ac ≠ bc

## 4) قائم الزاوية



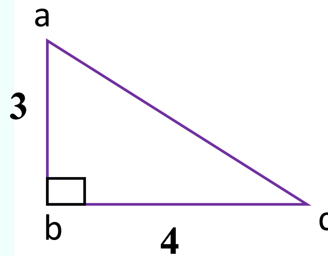

خواصه

- إحدى زواياه = 90 °
- الوتر ac ، الضلع القائم ab ، الضلع القائم bc
- قانون المثلث القائم الزاوية $(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2$

مثال1

في الشكل مثلث قائم الزاوية

جد طول ac




نكتب قانون المثلث القائم الزاوية

$$(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2$$

$$(ac)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

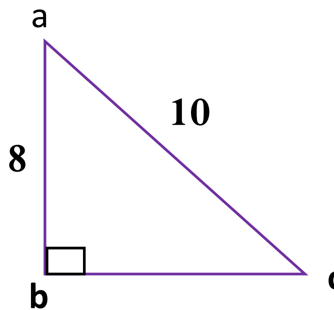
$$(ac)^2 = 9 + 16 \rightarrow (ac)^2 = 25 \rightarrow ac = \pm 5$$

ac = 5 (ac ≠ -5 تهمل لان البعد موجب دائماً)

مثال2

في الشكل مثلث قائم الزاوية

جد طول الضلع bc




نكتب قانون المثلث القائم الزاوية

$$(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2$$

$$(10)^2 = (8)^2 + (bc)^2$$

$$100 = 64 + (bc)^2 \rightarrow (bc)^2 = 100 - 64 = 36$$

$$\rightarrow bc = \pm 6$$

bc = 6 (bc ≠ -6 تهمل لان البعد موجب دائماً)

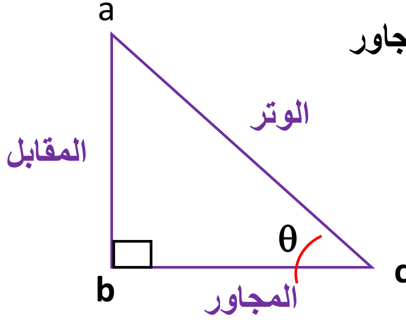
## ملاحظة

بالنسبة الزاوية θ الموضحة في الشكل المجاور

يسمى الضلع ac بالوتر

يسمى الضلع ab بالمقابل

يسمى الضلع bc بالمجاور




## ملاحظة

الزاوية القائمة =90°

الزاوية الحادة قياسها أكبر من صفر° وأقل من 90°

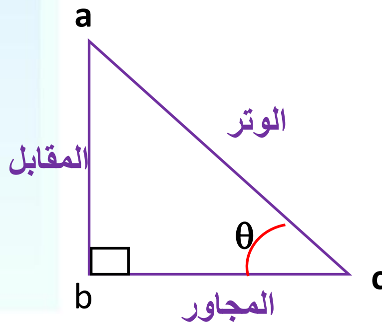
الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من 90° وأقل من 180°

## [ 2- 4 ] النسب المثلثية

الهدف من الدرس



أن يكون الطالب قادرا على أن:
يجد النسب المثلثية




1) جيب الزاوية θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ رمزه ( $\sin\theta$ )

2) جيب تمام الزاوية θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ رمزه ($\cos\theta$)

3) ظل الزاوية θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ رمزه ( $\tan\theta$ )

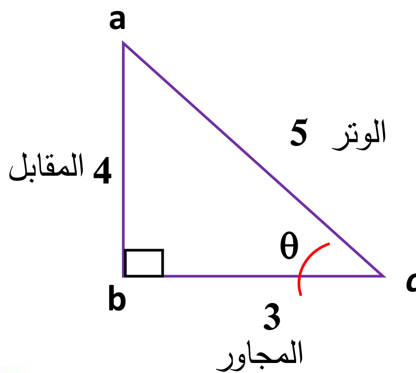
ملاحظة:

- المقابل = طول الضلع المقابل
- الوتر = طول الوتر
- المجاور = طول الضلع المجاور

### مثال3

في الشكل

جد $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$



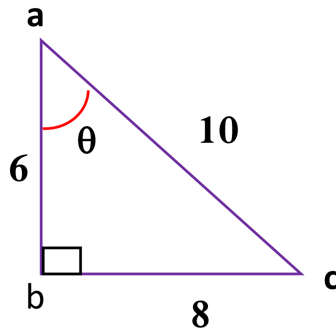
الحل

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{3}$$

## نشاط




في الشكل

جد $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

## [3 – 4] النسب المثلثية الخاصة للزوايا الخاصة 30° ، 60° ، 45°

**الهدف من الدرس**



أن يكون الطالب قادرا على أن:
يجد قيم $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$
للزوايا 30 ، 45 ، 60

| | 30° | 60° | 45° |
|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $\cos\theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $\tan\theta$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | 1 |

### مثال 4

جد ناتج $\sin 30^\circ$ ، $\cos 60^\circ$ ، $\tan 45^\circ$ ، $\sin 60^\circ$ ، $\tan 30^\circ$

**الحل**

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

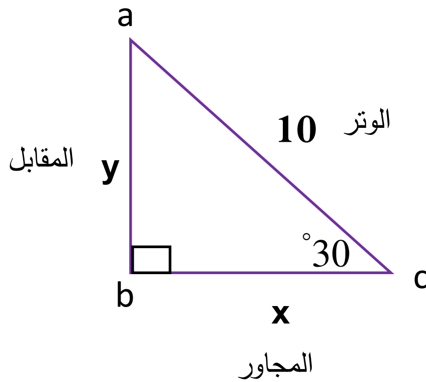
$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**مثال5**

في الشكل

جد قيمة x ، y




الحل

**إيجاد قيمة y :**

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \rightarrow \sin 30^\circ = \frac{y}{10} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{10}$$

$$2y = 10 \rightarrow y = 5$$

**إيجاد قيمة x:**

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \rightarrow \cos 30^\circ = \frac{x}{10} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10}$$

$$2x = 10\sqrt{3} \rightarrow x = 5\sqrt{3}$$

## [4-4] تطابق مثلثين



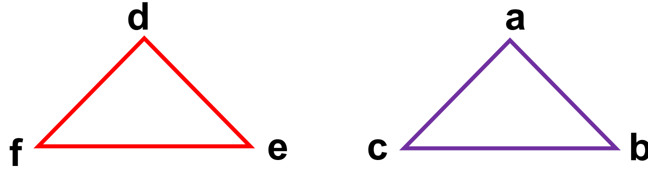
الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يذكر حالات تطابق المثلثين

### حالات تطابق المثلثين

1) تطابق الأضلاع الثلاثة

يتطابق المثلثان إذا تساوى طول كل ضلع مع نظائرهم من المثلث الآخر




المثلث a b c ينطبق على المثلث d e f

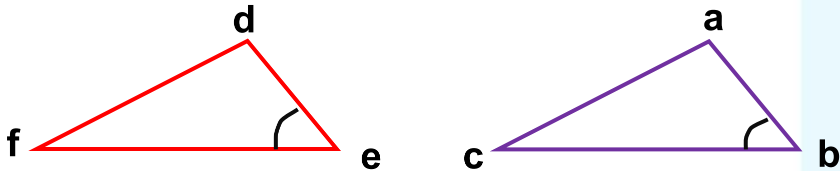
لان $\overline{ab}$ ينطبق على $\overline{de}$ وتكتب $\overline{ab} \equiv \overline{de}$

$\overline{bc}$ ينطبق على $\overline{fe}$ $\overline{bc} \equiv \overline{fe}$

$\overline{ac}$ ينطبق على $\overline{fd}$ $\overline{ac} \equiv \overline{fd}$ حيث ≡ علاقة تطابق

2) تطابق ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعين والزاوية المحصورة بينهما مع نظائرهم من المثلث الآخر.




المثلث a b c ينطبق على المثلث d e f

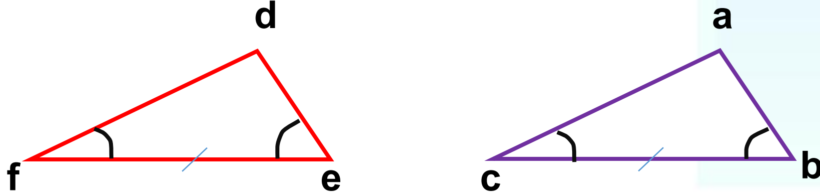
لان قياس زاوية b = قياس زاوية e

$\overline{ab} \equiv \overline{de}$

$\overline{bc} \equiv \overline{fe}$

3) تطابق زاويتين وضلع واصل بين رأسيهما

يتطابق المثلثان إذا تطابق زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما مع نظائرهم من المثلث الآخر




المثلث a b c ينطبق على المثلث d e f

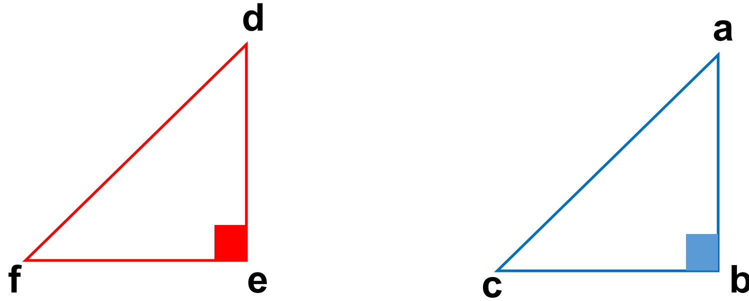
لان قياس زاوية b = قياس زاوية e

قياس زاوية c = قياس زاوية f

$\overline{fe} \equiv \overline{cb}$

4) تطابق وتر وضلع قائم (للمثلثين القائمين الزاوية)

يتطابق المثلثان إذا تساوى طول أي ضلع والوتر في المثلث مع نظائرهم في المثلث الآخر




المثلث a b c ينطبق على المثلث d e f

لان $\overline{ac} \equiv \overline{fd}$

$\overline{ab} \equiv \overline{de}$

## [5 – 4] تشابه مثلثين

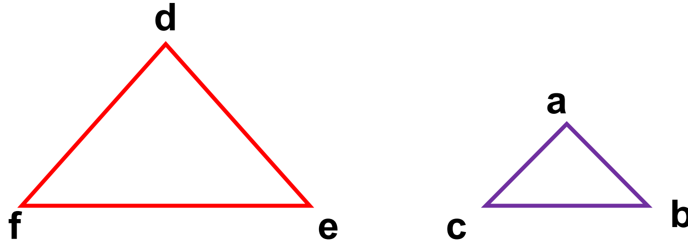


الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يذكر حالات تشابه المثلثين

بعض حالات تشابه مثلثين

1) يتشابه المثلثان إذا تساوت قياسات زواياهما المتناظرة.



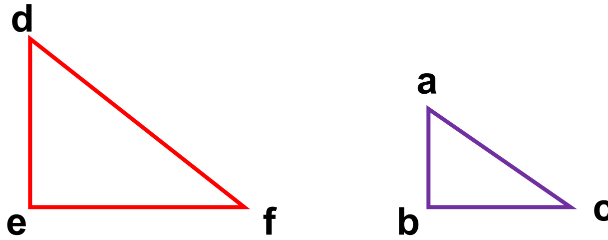

المثلث a b c يشبه المثلث d e f

لان قياس زاوية a = قياس زاوية d

قياس زاوية b = قياس زاوية e

قياس زاوية c = قياس زاوية f

2) يتشابه المثلثان إذا تناسبت أضلاعهما المتناظرة.



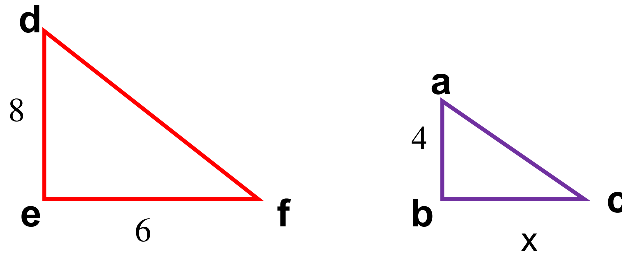

المثلث a b c يشبه المثلث d e f وتكتب $\Delta abc \sim \Delta def$ حيث أن ~ علاقة تشابه

لان

$$\frac{ab}{de} = \frac{ac}{fd} = \frac{bc}{fe}$$

## مثال1

في الشكل المجاور المثلثان a b c ، d e f متشابهان جد قيمة x



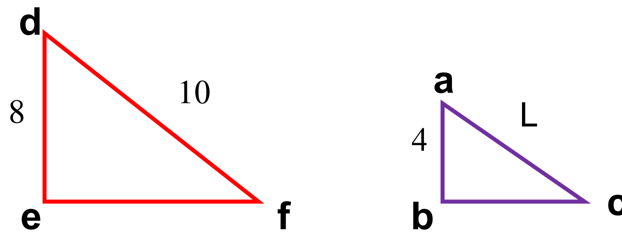

الحل

$$\frac{ab}{de} = \frac{bc}{fe} \rightarrow \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{x}{6}$$

$$2x = 6 \rightarrow x = 3$$

## مثال2

في الشكل المجاور المثلثان a b c ، d e f متشابهان جد قيمة L




الحل

$$\frac{ab}{de} = \frac{ac}{fd} \rightarrow \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{L}{10}$$

$$2L = 10 \rightarrow L = 5$$

## تمارين الوحدة الرابعة

س1) أذكر خواص المثلثات الآتية ( مع الرسم):

أ) مثلث متساوي الساقين

ب) مثلث متساوي الأضلاع

ج) مثلث قائم الزاوية

**س2) المثلث abc قائم الزاوية في b ، طول الضلع ab = طول الضلع bc = 2 سم جد طول الضلع ac.**

**س3) إذا علمت أن θ = 30° جد قيمة كلاً من :**

أ) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$

ب) $\sin 2\theta$

**س4) جد ناتج كلاً مما يلي:**

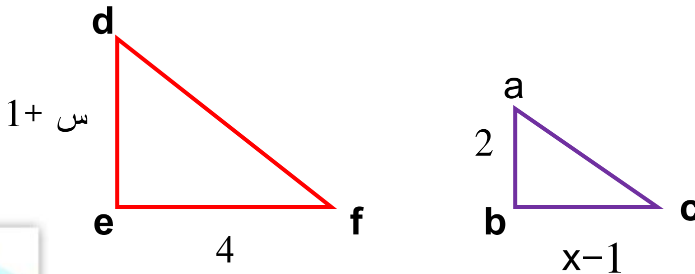
أ) $(\sin 30^\circ + \cos 60^\circ)^2$

ب) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ - \tan^2 45^\circ$

**س5) أ) أذكر حالات تطابق مثلثين**

**ب) أذكر حالات تشابه مثلثين**

**س6) المثلثين a b c ، d e f متشابهان كما في الشكل المجاور جد قيمة x**



# الوحدة الخامسة

## النظام الإحداثي



### الهدف من دراسة الوحدة

ينبغي بعد دراسة الوحدة الخامسة أن يكون الطالب قادرا على أن:

1) تعين نقاط $(x, y)$ في المستوي الإحداثي
2) يجد البعد بين نقطتين في المستوي الإحداثي
3) يجد منتصف القطعة المستقيمة في المستوي الإحداثي
4) يجد ميل المستقيم المار بالنقطتين
5) يجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين
6) يبرهن توازي أو تعامد المستقيمين

## [ 5 -1 ] المستوي الإحداثي



### الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يعين نقاط في المستوي الإحداثي

**يتكون المستوي الإحداثي من محورين متعامدين هما:**

المحور الأفقي ويسمى بـ المحور السيني x

المحور العمودي ويسمى بـ المحور الصادي y

الزوج المرتب (x, y) يتم تعينه في المستوي الإحداثي.

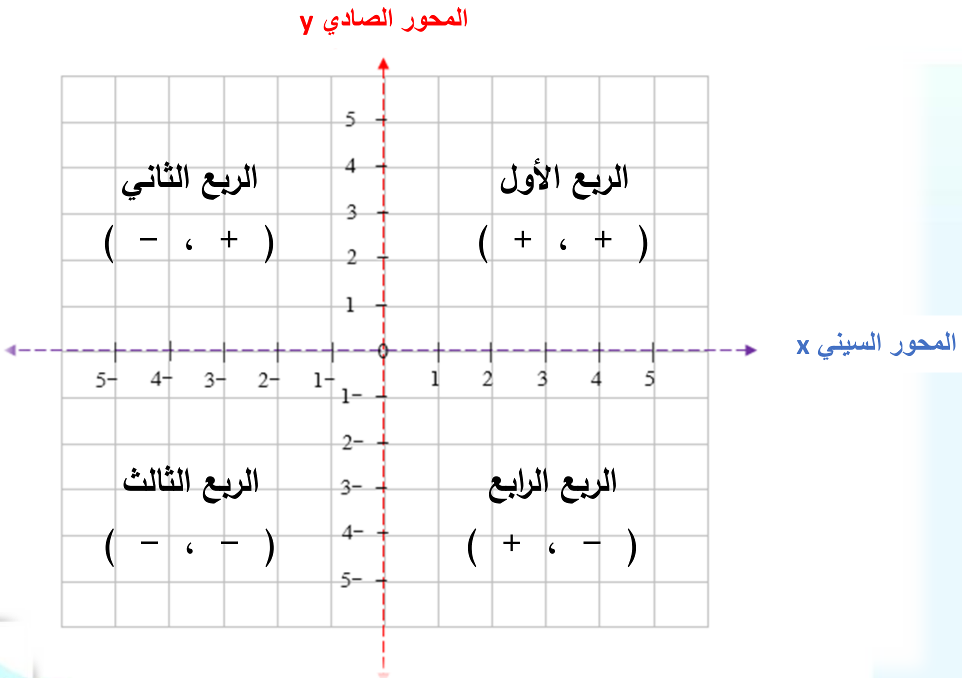
### المستوي الإحداثي مؤلف من أربعة أرباع هما:

**الربع الأول وتكون الإشارتين ( + ، +)**

**الربع الثاني وتكون الإشارتين ( + ، − )**

**الربع الثالث وتكون الإشارتين ( − ، − )**

**الربع الرابع وتكون الإشارتين ( − ، + )**



## كيفية تعيين الزوج المرتب (x,y) في المستوي الإحداثي.

1) إذا كانت قيمة y= 0 ← النقطة (x,0) تقع على محور السينات

2) إذا كانت قيمة x= 0 ← النقطة ( 0,y ) تقع على محور الصادات

3) النقطة ( $x^{+}$ , $y^{+}$ ) تقع في الربع الأول

4) النقطة ( $x^{-}$ , $y^{+}$ ) تقع في الربع الثاني

5) النقطة ( $x^{-}$ , $y^{-}$ ) تقع في الربع الثالث

6) النقطة ( $x^{+}$ , $y^{-}$ ) تقع في الربع الرابع

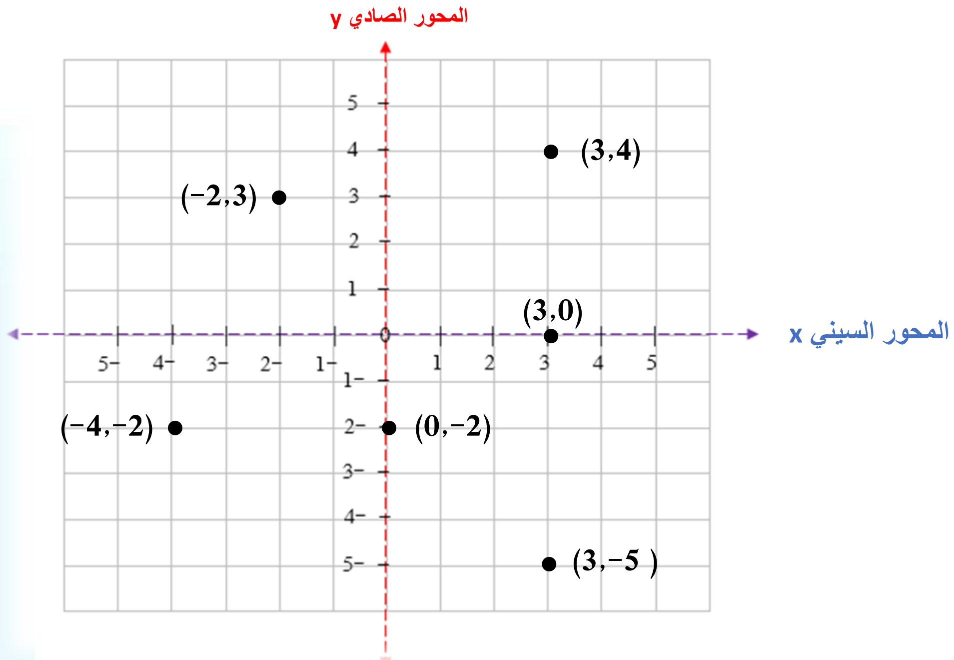
### مثال 1

**عين كلاً من النقاط الآتية في المستوي الإحداثي :**

**( 3 ، 0 ) ، (0 ، −2 ) ، ( 3 ، 4 )** ✍

**( −2 ، 3 ) ، (−4، −2 ) ، ( 3 ، −5)** ✍

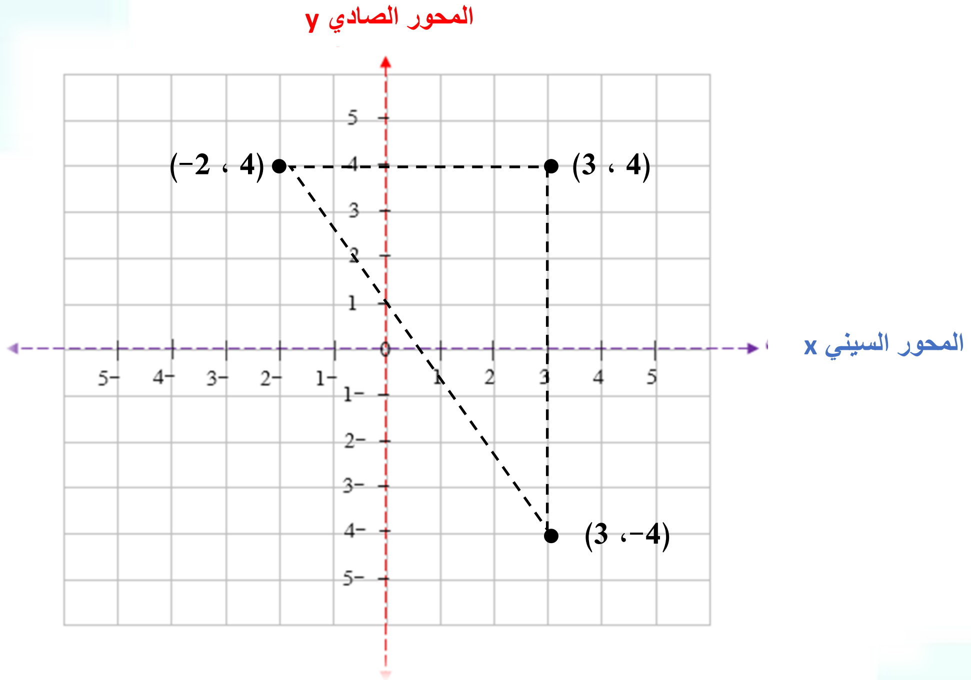
**الحل: نرسم المستوي الإحداثي ثم نعين النقاط عليه**



## مثال 2

عين النقاط ( 3 ، −4 ) a، (3 ، 4) b، (4، −2) c في المستوي الإحداثي ، ثم صل بين رؤوس النقاط .

الحل



## [ 5 - 2 ] البعد بين نقطتين



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يجد البعد بين نقطتين

لإيجاد البعد بين النقطتين $a\ (x_1 ، y_1)$، $b\ (x_2\ ,\ y_2)$

نستخدم القانون:

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

### مثال3

جد البعد بين النقطتين $b(\ 1 ، 3\ )$ ، $c(\ 5 ، 6\ )$

الحل

النقطتين $b(\ \underset{x_1}{1} ، \underset{y_1}{3}\ )$ ، $c(\ \underset{x_2}{5} ، \underset{y_2}{6}\ )$

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$s=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}$$

$$s=\sqrt{(4)^2+(3)^2}$$

$$s=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

## مثال 4

جد بعد النقطة (9، 0 ) عن نقطة الأصل .

الحل

لإيجاد بعد النقطة ( 9 ، 0 ) عن نقطة الأصل (0، 0 )

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

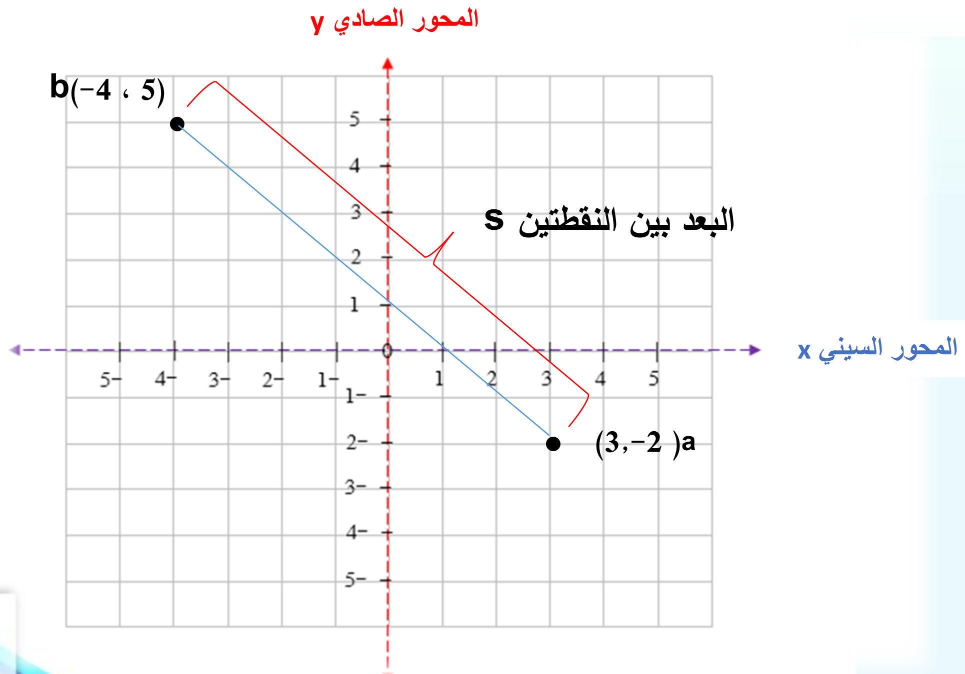
$$s=\sqrt{(0-0)^2+(0-9)^2}=\sqrt{81}=9$$

## مثال5

عين النقطتين a( 3 ، −2 ) ، b(−4 ، 5) في المستوى الإحداثي

ثم جد البعد بينهما

الحل



النقطتين $a(3 ، -2)$ ، $(-4 ، 5)$

$x_1 \quad y_1 \qquad x_2 \quad y_2$

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$s=\sqrt{((-4)-3)^2+(5-(-2))^2}$$

$$s=\sqrt{(-7)^2+(5+2)^2}=\sqrt{49+49}=\sqrt{98}$$

## ملاحظات

### في المستوي الإحداثي

1) تكون النقاط a ، b ، c على استقامة واحدة إذا كان

$ac = ab + bc$

2) يكون المثلث الذي رؤوسه النقط a ، b ، c قائم الزاوية في b إذا كان:

$(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2$

3) يكون المثلث الذي رؤوسه النقط a ، b ، c متساوي الساقين

إذا كان $ac = ab$.

4) يكون المثلث متساوي الأضلاع إذا كان:

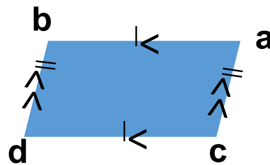
$ac = ab = bc$.

5) يكون المثلث مختلف الاضلاع إذا كان:

$ac \neq ab \neq bc$.

6) يكون الشكل الرباعي a ، b ، c , d متوازي الأضلاع إذا كان:

$cd = ab$



## مثال 5

بين أن النقط $a(3 ،4)$ ، $b(0 ، 1)$ ، $c(-3، -2)$ تقع على استقامة واحدة.

الحل

نجد البعد ab ونجد البعد bc ، ونجد البعد ac

$a(3 ، 4)$ ، $b(0 ، 1)$

$x_1 \quad y_1 \qquad x_2 \quad y_2$

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{(0-3)^2+(1-4)^2} \quad =\sqrt{(-3)^2+(-3)^2} \quad =\sqrt{18}$$

$$=3\sqrt{2}$$

$b(0 ، 1)$ ، $c(-3 ، -2)$

$x_1 \quad y_1 \qquad x_2 \quad y_2$

$$bc=\sqrt{((-3)-0)^2+((-2)-1)^2} =\sqrt{9+9} =\sqrt{18}$$

$$=3\sqrt{2}$$

$a(3 ، 4)$ ، $c(-3 ، -2)$

$x_1 \quad y_1 \qquad x_2 \quad y_2$

$$ac=\sqrt{((-3)-3)^2+((-2)-4)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

النقاط على إستقامة واحدة لان $ac = ab + bc$

## مثال6

بين أن المثلث الذي رووسه $a(0 ، -1)$ ، $b(4 ، 0)$ ، $c(3 ، 4)$
مثلث قائم الزاوية

الحل

قانون البعد بين نقطتين $s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$ab=\sqrt{(4-0)^2+(0+1)^2}=\sqrt{(4)^2+(1)^2}=\sqrt{17}$$

$$bc=\sqrt{(3-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{(-1)^2+(4)^2}=\sqrt{17}$$

$$ac=\sqrt{(3-0)^2+(4+1)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

$$(ac)^2=(ab)^2+(bc)^2$$

$$(\sqrt{34})^2=(\sqrt{17})^2+(\sqrt{17})^2$$

$34=17+17$ إذن المثلث قائم الزاوية

## نشاط

بين أن المثلث الذي رؤوسه النقاط $a(3 ، -4)$ ، $b(5، -2)$، $c(5,-6)$
مثلث متساوي الساقين.

## [5 – 3 ] إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيم في المستوى الإحداثي



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يجد نقطة منتصف قطعة مستقيم

إذا كان لدينا قطعة المستقيم ab

فإن إحداثيا نقطة منتصف القطعة ab هي :

$$x=\frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y=\frac{y_1 + y_2}{2}$$

نقطة المنتصف ( x ، y ) لقطعة مستقيم في المستوى الاحداثي

### مثال7

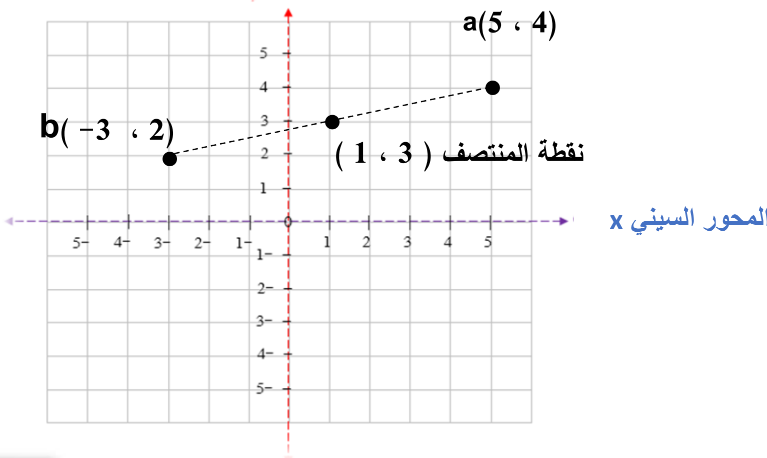
جد نقطة المنتصف لقطعة المستقيم a( 5 ، 4) ،b( −3 ، 2) في المستوى الإحداثي.

الحل

$$X=\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + (-3)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$Y=\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

نقطة المنتصف ( 1 ، 3 )



**مثال8**

إذا علمت أن النقطة $c(2 ، 3)$ هي منتصف قطعة المستقيم $a(x_1 ، y_1)$،
$b(3 ، 8)$ جد أحداثي النقطة a

الحل

$a(x_1 ، y_1)$ ، $b(3 ، 8)$ ، $c(2 ، 3)$

x ، y    $x_2$   $y_2$

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow 2 = \frac{x_1 + 3}{2}$$

$$X_1 + 3 = 4 \rightarrow x_1 = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow 3 = \frac{y_1 + 8}{2}$$

$$y_1 + 8 = 6 \rightarrow y_1 = -2$$

إحداثي النقطة $a(1 ، -2)$

## مثال9

بين أن الشكل $a(4، 0)$ ، $b(6، -6)$ ، $c(-8 ،0)$ ، $d(-10،6)$ متوازي أضلاع.

الحل

قطرا متوازي الأضلاع أحدهما ينصف الآخر

**نجد منتصف القطر ac , $a(4 ،0)$ ، $c(-8 ، 0)$**

$$\text{منتصف ac} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} ، \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-8 + 4}{2} ، \frac{0 + 0}{2}\right)= (-2، 0)$$

**نجد منتصف القطر $b(6 ،-6)$ ، $d(-10 ، 6)$**

$$\text{منتصف bd} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} ، \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{6 + (-10)}{2} ، \frac{(-6) + 6}{2}\right)= (-2،0)$$

الشكل متوازي الأضلاع لان منتصف ac= منتصف bd

## [ 5 – 4 ]ميل المستقيم المار بالنقطتين ( س1 ، ص1 )a ، (س2 ، ص2)b



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يجد ميل مستقيم يصنع زاوية مع محور السينات الموجب

ميل ab = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ بشرط $x_1 \neq x_2$

### مثال 10

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين (1− ، 3 ) a ، ( 5 ، 2− )b

الحل

ميل المستقيم ab = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-1)}{3-(-2)} = \frac{6}{5}$

### مثال11

جد ميل المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة ( 6 ، 3 )

الحل

نقطة الأصل هي ( 0 ، 0 )

ميل المستقيم = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-0}{3-0} = 2$

## [ 5 – 5 ] ميل المستقيم الذي يصنع زاوية مع محور السينات الموجب



**الهدف من الدرس**

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يجد ميل مستقيم عُلمت زاويتهُ مع محور السينات الموجب

**ميل المستقيم = $\tan\theta$**

### مثال12

**جد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية 45° مع محور السينات الموجب**

**الحل**

**ميل المستقيم = $\tan\theta = \tan 45^\circ = 1$**

### مثال12

**جد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية $60^\circ$ مع محور السينات الموجب**

**الحل**

**ميل المستقيم = $\tan\theta = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$**

### نشاط

1) إذا علمت أن ميل المستقيم المار بالنقطتين a(3 ، y ) ، b( 5 ، 6) يساوي 4 جد قيمة y .

2) مستقيم يصنع زاوية 30° مع محور السينات الموجب جد ميله.

## [ 5 – 6 ] ميل المستقيم الذي معادلته $ax + by + c = 0$

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$$



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يجد ميل مستقيم عُلمت معادلته

### مثال13

جد ميل المستقيم الذي معادلته $3x + 2y + 1 = 0$

الحل

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-3}{2}$$

### مثال14

جد ميل المستقيم $x - 2y = 0$

الحل

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

## [ 5 – 7 ] توازي أو تعامد المستقيمين



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يبرهن توازي أو تعامد مستقيمين باستخدام قانون الميل

إذا كان لدينا المستقيمين $\overleftrightarrow{M}$ ، $\overleftrightarrow{L}$

1) يتوازى المستقيمين إذا كان ميل المستقيم M = ميل المستقيم L والعكس صحيح

2) يتعامد المستقيمين إذا كان ميل المستقيم M × ميل المستقيم L =−1 والعكس صحيح

### مثال15

برهن أن المستقيمين $2x + 4y + 1 = 0$ ، $x + 2y - 1 = 0$ متوازيان.

الحل

ميل المستقيم الأول = $\dfrac{-\text{ x معامل}}{\text{y معامل}} = \dfrac{-1}{2}$

ميل المستقيم الثاني = $\dfrac{-\text{ x معامل}}{\text{y معامل}} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

المستقيمان متوازيان لان ميل المستقيم الأول = ميل المستقيم الثاني

## مثال15

برهن أن المستقيمين $4x - 2y + 1 = 0$ , $x + 2y = 0$
متعامدان.

الحل

ميل المستقيم الأول = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-1}{2}$

ميل المستقيم الثاني = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-4}{-2} = 2$

ميل المستقيم الأول × ميل المستقيم الثاني

$(\frac{-1}{2})(2) = -1$ المستقيمان متعامدان

## تمارين الوحدة الخامسة

س1) أ) إذا علمت أن البعد بين النقطتين $a(1 ، k)$ ، $b( 5 ، 6)$ يساوي (5) فما قيمة k ؟

ب) إذا علمت أن النقطة $c(-2 ، 0 )$ هي منتصف القطعة المستقيمة أب حيث $a( 6 ، -6)$ ، $b( x ، y )$ فجد إحداثي النقطة b .

س2) بين أن المثلث الذي رؤوسه النقط $a( 3،-4)$ ، $b(5، -2)$ ، $c(5، -6)$ هو مثلث متساوي الساقين.

س3) برهن أن الشكل a b c d هو متوازي أضلاع حيث أن $a( 1 ، 2)$ ، $b( 4 ، 2)$ ، $c(6، 5)$ ، $d( 3 ، 5)$.

س4) جد ميل المستقيم ab في الحالات الآتية:

أ) يمر بالنقطتين $( 3 ، 2 )$ ، $( 2 ، 4 )$

ب) يمر بنقطة الأصل ويمر بالنقطة $( 3، -4 )$

د) يصنع زاوية $30°$ مع محور السينات الموجب

س5) هل المستقيمين $3y - 2x + 5 = 0$ ، $3x + 2y = 0$ متوازيان أم متعامدان ؟ بين ذلك ؟

س6) ما العلاقة بين المستقيم المار بالنقطتين $( 3 ، 2 )$ ، $(5 ، 4)$ والمستقيم الذي معادلته $x - y = -7$

تم بحمد الله